超幾何型差分作用素のスペクトルについて(スペクトル散乱理論とその周辺)

AUTHOR(S):

筧, 知之

数理解析研究所講究録
873巻 1994年 11-24

超幾何型差分作用素のスペクトルについて

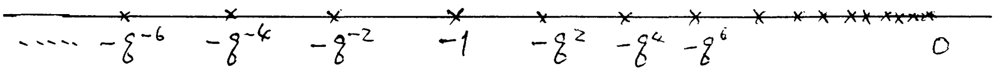
筑波大・数学系
筧 知之 (Tomoyuki KAKEHI)

§0. Introduction and Notations

ここでは、ある種の差分作用素のスペクトルについて述べる。ここで扱う差分作用素は、$SU_q(1,1)$ という non-compact 型量子群の Casimir 作用素から得られるものであり、量子群の表現論と密接に関係している。

まず、q-analogue の理論でよく用いられる記号について説明しておく。以下において q は $0<q<1$ なる定数とする。

• q-interval $(-\infty,0]_{q^2} := \{-q^{2n} ; n\in\mathbb{Z}\}$



• q-difference $D = D_{q^2}$

$(-\infty,0]_{q^2}$ 上の関数 φ に対して、その q-difference $D_{q^2}\varphi$ を

$$D_{q^2}\varphi(\zeta) := \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(q^2\zeta)}{(1-q^2)\zeta} \qquad \zeta\in(-\infty,0]_{q^2}$$

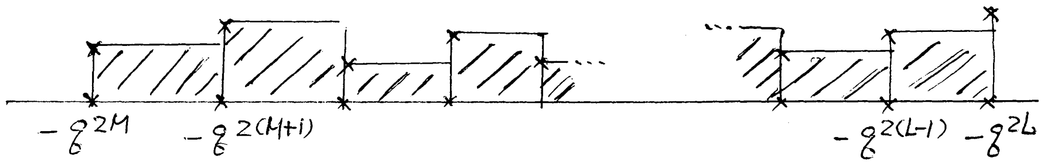
で定める.

・Jackson積分： $\zeta_1 = -q^{2M},\quad \zeta_2 = -q^{2L} \in (-\infty, 0]_{q^2}$

及び、$(-\infty, 0]_{q^2}$ 上の関数 φ に対して、そのJackson積分を次で定める.

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \varphi(\zeta)\, d_{q^2}\zeta := \sum_{n=M}^{L-1} \varphi(-q^{2n})\, q^{2n}(1-q^2)$$

(注意1) これは、次の斜線部の面積を表わしている.



(注意2) Jackson積分と q-difference とは互いに逆演算の関係になっている、即ち、

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} D_{q^2}\varphi(\zeta)\, d_{q^2}\zeta = \varphi(\zeta_2) - \varphi(\zeta_1)$$

更に次の記号を導入する

・$[a]_q := \dfrac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}}$　a：実数

・$(a;q)_n := \prod_{j=0}^{n-1}(1-aq^j)$, $(a;q)_0 := 1$

・q-shift operator $T = T_{q^2}$:　$T_{q^2}\varphi(\zeta) := \varphi(q^2\zeta)$

(注意3) $-\infty \sim 0$ のJackson積分は、次で定める.

$$\int_{-\infty}^{0} \varphi(\zeta)\, d_{q^2}\zeta := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(-q^{2n})\, q^{2n}(1-q^2)$$

§1. 差分作用素 $C_{\alpha,\beta}$ と、そのスペクトルについて.

まず Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ を定める.

・$\mathcal{H}_{\alpha,\beta} \ni \varphi \underset{def}{\Longleftrightarrow}$ φ は $(-\infty, 0]_{q^2}$ 上の関数であって、

$$\int_{-\infty}^{0} |\varphi(\zeta)|^2 \mu_{\alpha,\beta}(\zeta)\, d_{q^2}\zeta < +\infty$$

ここで、α, β は非負の整数であって、density function $\mu_{\alpha,\beta}(\zeta)$ は、$\mu_{\alpha,\beta}(\zeta) := (-\zeta)^{\alpha}(q^2\zeta; q^2)_{\beta}$ で定める.

次に、我々が扱う差分作用素について述べる. $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ 上の差分作用素 $C_{\alpha,\beta}$ を次で定める.

$$C_{\alpha,\beta}\varphi(\zeta) := \frac{-q^{\alpha-\beta+1}}{\mu_{\alpha,\beta}(\zeta)} D_{q^2}^{*} \mu_{\alpha+1,\beta+1}(\zeta) D_{q^2}\varphi(\zeta) + \left[\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right]_q^2 \varphi(\zeta)$$

ここで、$D_{q^2}^{*}$ は Jackson 積分に関する D_{q^2} の adjoint であり、$D_{q^2}^{*} = -q^{-2} T_{q^2}^{-1} D_{q^2}$ である.

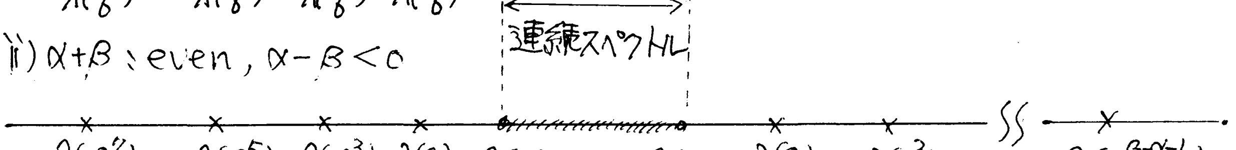
そして、$C_{\alpha,\beta}$ の定義域 $\mathcal{D}_{\alpha,\beta}$ を次で定める.

$\mathcal{D}_{\alpha,\beta} \ni \varphi \underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\varphi,\ C_{\alpha,\beta}\varphi \in \mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ かつ $\lim_{\zeta \to 0} |\zeta|^{\frac{\alpha+1}{2}} D_{q^2}\varphi(\zeta) = 0$

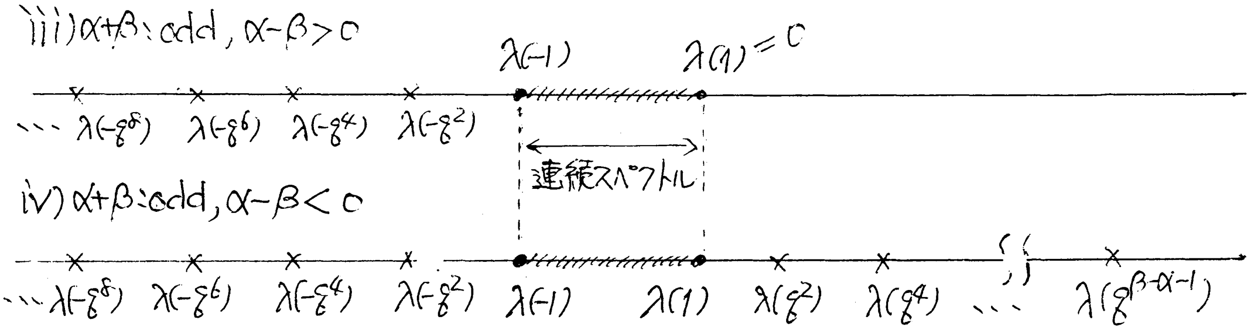
すると、$(C_{\alpha,\beta}, \mathcal{D}_{\alpha,\beta})$ は、$\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ 上の自己共役作用素となる。

<u>定理 1</u> $(C_{\alpha,\beta}; \mathcal{D}_{\alpha,\beta})$ のスペクトルは次のようになる。

i) $\alpha+\beta$: even, $\alpha-\beta \geqq 0$



ii) $\alpha+\beta$: even, $\alpha-\beta < 0$



ここで $\lambda(\tau) = q^2(1-q^2)^{-2}(\tau+\tau^{-1}-2)$ とおいた。

(注意1) $\lambda<0$ の部分に現れる点スペクトルは、$\alpha+\beta$: even の時、$\lambda(-q^{2n-1})$, $n=1,2,3,\cdots$, $\alpha+\beta$: odd の時、$\lambda(-q^{2n})$, $n=1,2,3,\cdots$ となり、共に無限個現れる。

(注意2) 低エネルギー領域にのみ、$C_{\alpha,\beta}$ の連続スペクトルが現れ、α,β 依らず、それは、

$$\{\lambda(e^{i\theta})\,;\,0\leqq\theta\leqq\pi\} = \left[-\frac{4q^2}{(1-q^2)^2},\,0\right]$$

なる閉区間となる。

(注意3) $\lambda>0$ の部分には点スペクトルが現れる場合、その数は、ちょうど $\left[\frac{\beta-\alpha}{2}\right]$ 個である。

§2. $C_{\alpha,\beta}$ の固有関数系

$C_{\alpha,\beta}$ の固有関数系を具体的に与えるため、basic hypergeometric function を用いる。それは次のようなものである。

$$_2\varphi_1\left(\begin{matrix}a & b\\ & c\end{matrix};q;z\right) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a:q)_n\,(b:q)_n}{(c:q)_n\,(q:q)_n}z^n$$

この ${}_2\varphi_1$ に対して、$\varphi_{\alpha,\beta}(\zeta;\tau)$ を次で定める。

$$\varphi_{\alpha,\beta}(\zeta;\tau) := {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix}\tau q^{\alpha+\beta+1} & \tau^{-1}q^{\alpha+\beta+1} \\ & q^{2\alpha+2}\end{matrix} ; q^2 ; q^2\zeta\right)$$

すると、$\varphi_{\alpha,\beta}(\zeta;\tau)$ は、$\{-1\leqq\zeta<0\}\cap(-\infty,0]_{q^2}$ において、

$$\{C_{\alpha,\beta}-\lambda(\tau)\}\varphi_{\alpha,\beta}(\zeta;\tau)=0$$

を満たす。そこで、上記の差分方程式の解として、$(-\infty,0]_{q^2}$ 全体に延長したものも、同じ $\varphi_{\alpha,\beta}(\zeta;\tau)$ で表わす事にする。

<u>定理2</u>

i) $\varphi_{\alpha,\beta}(\zeta;e^{i\theta})$, $0\leqq\theta\leqq\pi$ は、連続スペクトル $\lambda(e^{i\theta})$ に対応する、$C_{\alpha,\beta}$ の一般化された固有関数である。

ii) $\lambda(\tau)$ が点スペクトルであるような τ に対して、$\varphi_{\alpha,\beta}(\zeta;\tau)$ は、$C_{\alpha\beta}$ の固有関数となっている。

§3 Gaussの超幾何関数との関係

$C_{\alpha,\beta}$ は、ある意味で"超幾何型"の差分作用素である。つまり、$q\to1$ とする事で Gaussの超幾何微分作用素とうまく対応しているのである。以下において、その対応関係を説明する。

形式的に $q\to1$ とすると、すぐ判るように、

$D_{q^2}\longrightarrow\frac{d}{d\zeta}$, $D^*_{q^2}\longrightarrow-\frac{d}{d\zeta}$, $\mu_{\alpha,\beta}(\zeta)\longrightarrow(-\zeta)^{\alpha}(1-\zeta)^{\beta}$

$\left[\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right]_q\longrightarrow\frac{\alpha+\beta+1}{2}$ 従って、この時、

$$C_{\alpha,\beta} \xrightarrow[(q\to 1)]{} \frac{1}{(-\zeta)^{\alpha}(1-\zeta)^{\beta}}\frac{d}{d\zeta}(-\zeta)^{\alpha+1}(1-\zeta)^{\beta+1}\frac{d}{d\zeta}+\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2$$

$$=(-\zeta)(1-\zeta)\frac{d^2}{d\zeta^2}+\{(\alpha+\beta+2)\zeta-(\alpha+1)\}\frac{d}{d\zeta}+\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2$$

$=P_{\alpha,\beta}$ とおくと、$P_{\alpha,\beta}$は、Gaussの超幾何微分作用素となっている。そして、$P_{\alpha,\beta}f=\sigma^2 f$ の解で、原点で正則なものは、

$$_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{\alpha+\beta+1}{2}+\sigma & \frac{\alpha+\beta+1}{2}-\sigma \\ \alpha+1 & \end{matrix};\zeta\right)$$

で与えられる。一方、$C_{\alpha,\beta}\varphi=\lambda(q^{2\sigma})\varphi$ の解は、$\varphi_{\alpha,\beta}(\zeta;q^{2\sigma})$ で与えられ、$q\to 1$ とすると、$\lambda(q^{2\sigma})\to\sigma^2$ かつ、

$$\varphi_{\alpha,\beta}(\zeta,q^{2\sigma})\longrightarrow {}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{\alpha+\beta+1}{2}+\sigma & \frac{\alpha+\beta+1}{2}-\sigma \\ \alpha+1 & \end{matrix};\zeta\right)$$

となり、うまく対応している事が判る。

§4. 問題の背景

何故、このような差分作用素のスペクトルを考えるのかというと、それは量子群の表現論と関係があるからであるが、説明を簡単にするために、ここでは通常のLie群$SU(1,1)$に話を置き換えて説明する。以下 $G=SU(1,1)$ とおき、対応するLie環を$\mathfrak{g}$と表わすと、

$$G=\left\{\begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix};\ xy-uv=1,\ \bar{x}=y,\ \bar{u}=v\right\}$$

$$\mathfrak{g}=\left\{\begin{pmatrix} ia & b \\ \bar{b} & -ia \end{pmatrix};\ a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{C}\right\}$$

$\mathfrak{g}$の base $H=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ をとり、
これを用いて、G上の2次の微分作用素$\mathcal{P}$を、

$$\mathcal{P}=\frac{1}{4}X^2+\frac{1}{4}Y^2-\frac{1}{4}H^2+\frac{1}{4}$$

と定める。

一方、G上の関数fに対して、$R_g f(x)=f(xg)$として、右移動R_gを定めると、$R_g R_h=R_{gh}$ $\forall g,h\in G$,かつ$\|R_g f\|_{L^2(G)}=\|f\|_{L^2(G)}$（$L^2$ノルムを不変にする）を満たす。従って、$(R_g, L^2(G))$はユニタリー表現となっている。実は、この$R_g$と上記$\mathcal{P}$の間には"$\mathcal{P}R_g=R_g\mathcal{P}$"という関係がある。（この性質を持つ上記$\mathcal{P}$をCasimir作用素という）
そこで、V_λ（$\subset L^2(G)$）を、固有値λに対する$\mathcal{P}$の固有空間とすると、上記の性質より、$f\in V_\lambda \Rightarrow R_g f\in V_\lambda$という事が導ける。即ち、固有空間$V_\lambda$は、$(R_g, L^2(G))$の部分表現になっている事が判る。従って、ユニタリー表現$(R_g, L^2(G))$が既約表現の直和に、どのように分解するか、を調べるには、微分作用素$\mathcal{P}$のスペクトル分解を調べれば良いのである。
実際、このやり方で、補系列と呼ばれる表現の系列を除く、$G=SU(1,1)$の既約ユニタリー表現を全て取り出す事ができる。

そして、Casimir 作用素 $\mathfrak{L}$ のスペクトルを調べる過程で、§2で述べた超幾何型微分作用素 $\mathfrak{L}_{\alpha,\beta}$ が現れるのである。以下において、その事を大雑把に説明する。

まず、Cartan 分解と呼ばれる G の元の分解を考える。

(*) $G \ni g = \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1-\zeta} & \sqrt{-\zeta} \\ \sqrt{-\zeta} & \sqrt{1-\zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta'} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta'} \end{pmatrix}$

$\zeta = -|u|^2$ とおいた．ここで $0 \leq \theta, \theta' < 2\pi$，$-\infty < \zeta < 0$

上記の Cartan 分解(*)より、次を得る．

$$(**)\ \begin{cases} x = e^{i(\theta+\theta')}\sqrt{1-\zeta} & u = e^{i(\theta-\theta')}\sqrt{-\zeta} \\ v = e^{-i(\theta-\theta')}\sqrt{-\zeta} & y = e^{-i(\theta+\theta')}\sqrt{1-\zeta} \end{cases}$$

(注意) 上記の分解(*)は、一意ではなく、$(\theta, \theta') \to (\theta+\pi, \theta'+\pi)$ と、とり替えるだけの任意性がある．また、$\zeta = 0$ では、(*) は well-defined ではない。

さて、G 上の関数を、$(\theta, \zeta, \theta') \in [0, 2\pi) \times (-\infty, 0) \times [0, 2\pi)$ の3変数の関数と考え、(θ, θ') に関して、Fourier 級数展開しておく。更に、$e^{i(k\theta + l\theta')}$ の形の項を、(**)を用いて、x, u, v, y，及び ζ で表わし、次の展開式を得る。

$f \in L^2(G)$ に対して、

$$(\#)\quad \begin{aligned} f(g) = &\sum_{m\geq 0,\, n\geq 0} f_{mn}(\zeta) x^m u^n + \sum_{m<0,\, n\geq 0} f_{mn}(\zeta) y^{-m} u^n \\ &+ \sum_{m\geq 0,\, n<0} f_{mn}(\zeta) x^m v^{-n} + \sum_{m<0,\, n<0} f_{mn}(\zeta) y^{-m} v^{-n} \end{aligned}$$

展開式(#)において、各(m,n)に対応する$L^2(G)$の部分空間を$H_{m,n}$とおくと、$L^2(G) = \bigoplus_{m,n\in\mathbb{Z}} H_{m,n}$(直交分解)となり、しかも、"$PR_g = R_g P \quad \forall g \in G$"を用いると、

$$f \in H_{m,n},\ Pf \in L^2(G) \implies Pf \in H_{m,n}$$

が言える。そこで、m,nが$\geqq 0$か、<0か、に応じて、$e_{m,n}$は$x^m u^n$, $x^m v^{-n}$, $y^{-m} u^n$, $y^{-m} v^{-n}$のどれかを表わすとすると、$f(\zeta) e_{m,n} \in H_{m,n}$に対して、

$$P(f(\zeta) e_{m,n}) = \{P_{\alpha,\beta} f(\zeta)\} e_{m,n}$$

となっているのである。ここで$\alpha = |n|$, $\beta = |m|$とおいた。

また、分解(*)において、$dg = d\theta d\zeta d\theta'$が$G$の不変測度、(Haar測度)となる事が判る。そこで(**)を用いると、例えば、$f(\zeta) x^m u^n$に対しては、

$$\| f(\zeta) x^m u^n \|^2_{L^2(G)} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^0 |f(\zeta)|^2 |x^{2m}| |u^{2n}| d\theta d\theta' d\zeta$$

$$= 4\pi^2 \int_{-\infty}^0 |f(\zeta)|^2 (-\zeta)^{|n|} (1-\zeta)^{|m|} d\zeta$$

これより、何故、$(-\zeta)^\alpha (1-\zeta)^\beta$なるdensity functionが現れるのか、が判る。

以上により、Pのスペクトルを調べる問題が、$P_{\alpha,\beta}$のスペクトルを調べる問題に帰着された。$SU_q(1,1)$という量子群に対して、上記と同様の考察を行なって、出て来たのが、$C_{\alpha,\beta}$という差分作用素である。

§5. 量子群 $SU_q(1,1)$ について.

ここでは、量子群 $SU_q(1,1)$ について、簡単な説明を与え、$SU_q(1,1)$ の Casimir 作用素のスペクトルがどうなっているかを述べる。

古典 Lie 群 $SU(1,1)$ との比較により、説明する。

$SU(1,1) \ni g = \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix}$ に対して $g \mapsto x \quad g \mapsto u$
$g \mapsto v \quad g \longmapsto y$

を、それぞれ、$SU(1,1)$ 上の関数と考えると、これらの関数は、$xy - uv = 1$, $\bar{x} = y$, $\bar{u} = v$ なる関係式を満たしている。そして、$SU(1,1)$ 上の関数空間は、このような関係式を持つ生成元 x, u, v, y で生成されているのである。

量子群 $SU_q(1,1)$ とは、(正確には、$SU_q(1,1)$ の座標環 $A(SU_q(1,1))$ とは)、次の関係式を持つ4つの生成元 x, u, v, y で生成された algebra の事である。

(1) $qxu = ux, \quad qxv = vx, \quad qvy = yv, \quad quy = yu$
$\quad uv = vu, \quad xy - q^{-1}uv = yx - quv = 1$

(2) $x^* = y, \quad u^* = q^{-1}v, \quad v^* = qu, \quad y^* = x$

(注意) (1) で $q \to 1$ とすると、関係式 $xy - uv = 1$ だけが生き残る。また、(2) で $*$ と書いたのは、作用素の adjoint の意味である。実際、このような algebra は、ある種の数列空間上の operator algebra として実現されるのである。

(注意2) $SU(1,1)$ 上の関数の全体は、(掛け算作用素と見て) 可換な operator algebra を成す。そして、$SU_q(1,1)$ の座標環は形式的に $q \to 1$ とした時、この可換な operator algebra に"収束"する。この時、(2) は、$\bar{x} = y$, $\bar{u} = v$ なる関係式に"収束"する。

(注意3) $A(SU_q(1,1))$ と呼ばれるこの algebra は、更に Hopf algebra の構造を持つが、それについては説明を省く。

量子群 $SU_q(1,1)$ の場合にも、L^2 空間 $L^2(SU_q(1,1))$ が構成できるが、その元は、§4, (#) と同様に、次の形に展開できる。 $f \in L^2(SU_q(1,1))$ に対して、

$$f = \sum_{m \geq 0, n \geq 0} f_{m,n}(\zeta) x^m u^n + \sum_{m<0, n \geq 0} f_{m,n}(\zeta) y^{-m} u^n$$

$$(\#\#) \quad + \sum_{m \geq 0, n<0} f_{m,n}(\zeta) x^m v^{-n} + \sum_{m<0, n<0} f_{m,n}(\zeta) y^{-m} v^{-n}$$

ここで、$\zeta = -q^{-1}uv$、とおいた。前述のように、x, u, v, y, ζ は、ある数列空間上の作用素であり、$f_{m,n}(\zeta)$ もそうであるが、ある種の考察により、ζ, $f_{m,n}(\zeta)$ は、(掛け算作用素として) $(-\infty, 0]_{q^2}$ 上の関数と同一視できる。

(##) において、各 (m,n) に対応する $L^2(SU_q(1,1))$ の部分空間を $H_{m,n}$ とし、又、§4 と同様に $e_{m,n}$ を定めるとする。

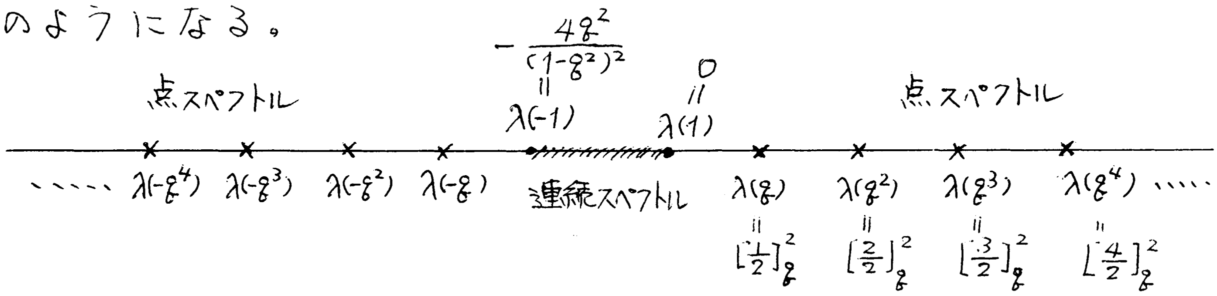
さて、$SU(1,1)$ と同様、$SU_q(1,1)$ 上にも Casimir 作用素が定義される。それを C と表わすと、§4 と同じ事が成り立つ。

即ち、$f(\zeta)e_{m,n} \in H_{m,n}$ に対して $C(f(\zeta)e_{m,n}) = \{C_{\alpha,\beta} f(\zeta)\} e_{m,n}$

ここで、$|n|=\alpha$, $|m|=\beta$ とおいた。

従って、量子群 $SU_q(1,1)$ の Casimir 作用素 C のスペクトル解析は、一変数の超幾何型差分作用素 $C_{\alpha,\beta}$ のスペクトル解析へと帰着される。この時、§1、定理1からの帰結として、次の定理が成り立つ。

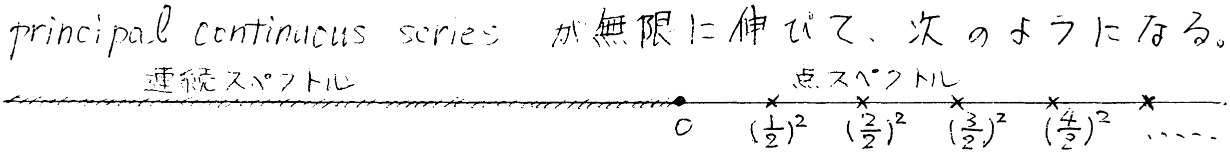
<u>定理3</u>　$SU_q(1,1)$ の Casimir 作用素 C のスペクトルは、次のようになる。



(注意1)　各点スペクトルの重複度は、∞ である。

(注意2)　$\lambda>0$ の部分の点スペクトル，連続スペクトル、そして、$\lambda<0$ の部分の点スペクトル、それぞれの固有空間の系列は、discrete series, principal continuous series, strange series, と呼ばれている。そして、この strange series という系列は、$SU(1,1)$ の場合には存在しない系列であり、量子群と古典群の差異を表わしている。

(注意3)　形式的に $q\to 1$ とすると、strange series は消滅し principal continuous series が無限に伸びて、次のようになる。



これは、$SU(1,1)$ の Casimir 作用素のスペクトルと一致する。

REFERENCES

[1] Bargman Irreducible unitary representations of the Lorentz group, Ann. Math., 48 (1947) 568-640

[2] Exton q-Hypergeometric Functions and Applications, John Wiley & Sons, New York, Brisbane, Chichester Toronto 1983

[3] Jimbo. M., A q-difference analogue of $U_q(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation, Lett. Math. Phys., 10 (1985), 63-69

[4] Kakehi T, Masuda T, and Ueno K, Spectral analysis of a q-difference operator which arises from the quantum SU(1,1) group, preprint

[5] Kakehi T, Masuda T, and Ueno K, Spectrum of an operator appears in the quantum SU(1,1) group Quantum and Non-Commutative Analysis (H. Araki et al. eds.) 253-261 (1993) Kluwer Academic Publishers

[6] Masuda T, Mimachi K, Nakagami Y, Noumi M, Saburi Y, and Ueno K, Unitary representations of the quantum group $SU_q(1,1)$ I, II Lett. Math. Phys 19 (1990) 187-194, 195-204

[7] Ueno. K., Spectral analysis of the Casimir operator on the quantum group $SU_q(1,1)$, Proc. Japan Acad., 66 (1990), 42-44

[8] Vaksman L. L. and Korodskii L. I., Spherical functions on the quantum group $SU_q(1,1)$ and q-analogue of Fok-Mehler's formula, Funks. Anal. Prilozhen (in Russian)

[9] Woronowicz S. L., Twisted SU(2) group. An example of non-commutative differential calculas, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ., 23 (1987) 117-181

[10] Woronowicz S. L. Differential calculas on compact matrix pseudogroups, Comm. Math. Phys. 122 (1989) 125-170